ポリトープ型の不確かさを持つシステムに対する ロバストD-stability制御系の一設計法

上　　泰*　岡田　昌之**

A Robust **D**-stability Synthesis for Systems with Politopic Uncertainty

Yasushi KAMI, Masayuki OKADA

ABSTRACT

This paper is concerened with a robust **D**-stability control for systems with politopic uncertainty. It is well known that analysis and synthesis problems for such control systems are non-convex problems, which are difficult to solve theoretically. Recently, a new definition of the prescribed pole placement region **D** having a quadratic term has been introduced and a new method for the robust **D**-stability analysis has been proposed. However, there is no method for the robust **D**-stability synthesis. The purpose of this paper is to build a preliminary theory for the robust **D**-stability synthesis. The effectiveness of our study is shown by a numerical example.

KEY WORDS: Robust **D**-stability control, linear matrix inequality, politopic uncertainty, elimination lemma, convex optimization

1. 序論

複素平面におけるシステムの極の位置は時間応答と密接に関係することがよく知られている．例えば，複素左半平面において連続システムの極を虚軸から離せば過渡特性が向上し，虚部を小さくすれば応答の振動が小さくなる．この事実を利用して，閉ループ極を指定領域 **D** に配置することを目的とした制御を領域極配置（**D**-stability）制御とよび，多くの場合，極配置領域は LMI Region[1] とよばれる複素数の１次式で規定される領域が用いられる．また，現実の制御対象にはモデル化誤差や経年劣化によるパラメータ変動等に起因する不確かさが必ず存在するため，実際の制御では不確かさにより制御対象が変動しても **D**-stability 性能が達成されることが要求される．このような制御をロバスト **D**-stability 制御とよぶ．

ロバスト **D**-stability 制御系設計を行列不等式を用いて行う場合，無数の行列不等式からなる問題を解くことになるため有限時間で目的とする制御器を求めることは難しいという問題点がある．この問題点に対し，従来は，それぞれの行列不等式に含まれる変数を共通化すれば有限個の不等式条件で十分となることを利用して制御系設計を行っていた [1~3]．しかし，変数を共通化することで得られる結果は保守的になってしまうことが知られているため，この保守性を改善するための方法が多くの研究者から提案されてきた [4),5]．

近年，Peaucelle ら [6] は複素数の２次項を含む領域 **D** の定義と行列不等式条件を与え，これを用いたロバスト **D**-stability 解析法を提案している．この方法は変数を共通化する方法よりも保守性が少なくなることは保証されているが，ロバスト **D**-stability 制御系設計へは適用できないという問題点がある．

本論文では，下村 [7] によって提案された拡張空間による制御系設計法を利用してこの問題点を改善する制御系設計法を提案する．本手法の特徴は，消去補題の逆適用によって生じる補助変数を共通化すると従来法で共通化されていた変数を非共通にできることである．これにより，提案法は従来法を１つの特殊解として含むため，得られる結果は従来法よりも少なくとも悪くならないことが理論的に保証される．最後に，数値例を用いて提案法の有効性を示す．

* 電気情報工学科　** 兵庫県立大学工学部学生

本論文では以下の表記を用いる．A^T は A の転置行列，$\otimes$ は行列のクロネッカー積，I_n は $n \times n$ の単位行列を表す．また，$\mathrm{He}\{A\}$ は $A + A^T$ であり，ブロック対称行列 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} A & * \\ B^T & C \end{bmatrix}$ と表記する．

2. 問題設定

本論文では以下の制御対象を考える．

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) \tag{1}$$

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{N} \tau_i A_i \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathcal{B} = \sum_{i=1}^{N} \tau_i B_i \in \mathbf{R}^{n\times m} \tag{2}$$

ここで，$\tau_1, \cdots, \tau_N$ は $\sum_{i=1}^{N} \tau_i = 1$ を満たす非負の実数である[1]とし，$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は可制御であると仮定する．また，式 (3) で複素平面上の領域 $\mathbf{D}$ を定義する[2]．

$$\mathbf{D} := \left\{ z \in \mathbf{C} \,\middle|\, R_{11} + R_{12}z + R_{12}^T\bar{z} + R_{22}z\bar{z} < 0 \right\} \tag{3}$$

$$R_{11}\left(= R_{11}^T\right), R_{12}, R_{22}\,(\geq 0) \in \mathbf{R}^{d\times d} \tag{4}$$

式 (1) のシステムに対して $u = Kx (K \in \mathbf{R}^{m\times n})$ の状態フィードバック制御則を施すと，閉ループ系は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{\mathcal{A}}x(t) && (5) \\ \bar{\mathcal{A}} &= \mathcal{A} + \mathcal{B}K && (6) \end{aligned}$$

このシステムに対し，ロバスト $\mathbf{D}$-stability 制御系設計問題を以下のように定義する．

問題 1 （ロバスト $\mathbf{D}$-*stability* 制御系設計問題）指定された複素平面上の領域 $\mathbf{D}$ に閉ループ系の極，すなわち，$\bar{\mathcal{A}}$ の全ての固有値が含まれるようなフィードバックゲイン K を求めよ．

この問題に関して以下の補題が成り立つ [6)]．

補題 1 式 (5) のシステムの極が全て領域 $\mathbf{D}$ に含まれるための必要十分条件は，以下の行列不等式を満足する $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が存在することである．

$$\begin{bmatrix} \eta & * \\ L \otimes (\bar{\mathcal{A}}\mathcal{X}) & -I_d \otimes \mathcal{X} \end{bmatrix} < 0, \mathcal{X} > 0 \tag{7}$$

$$\eta := R_{11} \otimes \mathcal{X} + \mathrm{He}\{R_{12} \otimes (\bar{\mathcal{A}}\mathcal{X})\} \tag{8}$$

ただし，L は $R_{22} = LL^T$ を満たす行列である．

この補題を用いて式 (2) で定義された多面体の内点全てで $\mathbf{D}$-stability 性能を有する制御系を設計するためには，$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の全ての組み合わせを式 (7) に代入して得られる無数の行列不等式を考え，そのそれぞれを満足する非共通な $\mathcal{X}$ と共通の K を求めなければならない．しかし，無数の行列不等式を有限時間内に解くことは困難であるため，従来は全ての行列不等式で $\mathcal{X}$ を共通化（無数の行列不等式において $\mathcal{X} = X$ とする）することから得られる次の定理を利用して解を求めていた．

定理 1 式 (5) の極が全て領域 $\mathbf{D}$ に含まれるための十分条件は，$\forall i \in \{1, \cdots, N\}$ に対して以下の行列不等式を満足する $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$ が存在することである．

$$\begin{bmatrix} \nu_i & * \\ L \otimes (\bar{A}_i X) & -I_d \otimes X \end{bmatrix} < 0,\ X > 0 \tag{9}$$

$$\bar{A}_i := A_i + B_i K \tag{10}$$

$$\nu := R_{11} \otimes X + \mathrm{He}\{R_{12} \otimes (\bar{A}_i X)\} \tag{11}$$

証明： 式 (9) に τ_i を乗じて和を取ると

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{i=1}^{N} \left(\tau_i \begin{bmatrix} \nu_i & * \\ L \otimes (\bar{A}_i X) & -I_d \otimes X \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} \tau_i\nu_i & * \\ L \otimes (\tau_i \bar{A}_i X) & -\tau_i I_d \otimes X \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta & * \\ L \otimes (\bar{\mathcal{A}} X) & -I_d \otimes X \end{bmatrix} && (12) \end{aligned}$$

となり，式 (7) が成り立つ．よって，定理 1 が示される．

この定理を用いれば，扱う行列不等式の本数が N 本（多面体の頂点の数）となるため，有限時間内に数値的な解を得ることが可能となる．ただし，このままでは不等式の (2,2) 成分以外に変数 K と X からなる非線形項が存在するため凸最適化問題とならない．そこで，$W_1 = KX$ の変数変換を施して得られる以下の行列不等式を考え，これを解いて得られる W_1 と X から $K = W_1X^{-1}$ として K を求める．

$$\begin{bmatrix} \nu_i' & * \\ L \otimes (A_i X + B_i W_1) & -I_d \otimes X \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

$$\nu_i' := R_{11} \otimes X + \mathrm{He}\{R_{12} \otimes (A_i X + B_i W_1)\} \tag{14}$$

ここで，定理 1 が持つ問題点を説明する．式 (13) は補題 1 で $\mathcal{X}$ を共通化して得られる式である．このことは，補題 1 より厳しい条件を採用して数値的に扱いやすくしたものが定理 1 であることを意味する．したがって，$\mathbf{D}$-stability 性能を達成する K が存在する問題であっても定理 1 から必ず解が得られる（N 本の不等式を全て満足する共通な X が得られる）とは限らないという問題点[3]がある（図 1 参照）．この保守性

[1] 組 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は (A_i, B_i) を頂点とする凸多面体の内部に存在することから，このような不確かさをポリトープ型の不確かさという．

[2] R_{22}=0 とおいた場合が LMI region[1)] である．

[3] この問題点を保守性とよぶ．

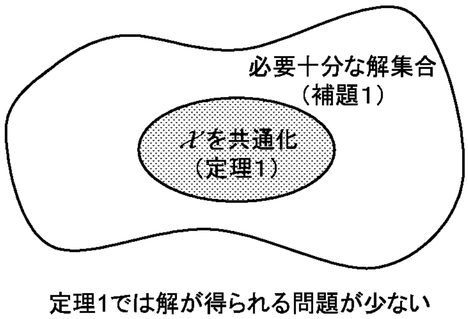

図 1　定理 1 が持つ保守性の概念図

を改善するための近年の研究成果の 1 つに，Dilation Lemma[4] を用いた方法 [6] がある．しかし，この方法は "解析問題（与えられた K が $\mathbf{D}$-stability 性能を有するかどうかを判定する問題）" の保守性は改善するが，設計問題では保守性を改善できないことが指摘されており，現在のところ，問題 1 に対する保守性の少ない方法は見当たらない．そこで，本研究では，定理 1 の保守性を改善するロバスト $\mathbf{D}$-stability 制御系設計法を提案することを目的とする．

3.　消去補題を用いた設計法

本章では，消去補題を用いたロバスト $\mathbf{D}$-stability 制御系設計法を提案する．本手法の特徴は，消去補題を逆適用した際に生じる補助変数を共通化することで定理 1 で共通化していた $\mathcal{X}$ を非共通化できる点である．これにより，得られる結果が少なくとも定理 1 よりも悪くはならないことが理論的に保証できる．

まず，本研究の鍵となる消去補題 [7〜9] を示す．

補題 2　（消去補題）$\Omega = \Omega^T \in \mathbf{R}^{p\times p}$，$\Gamma \in \mathbf{R}^{p\times q}$，$\Lambda \in \mathbf{R}^{r\times p}$ が与えられたとき，以下の 2 つの命題は等価である．

(i) $\mathrm{He}\,\{\Gamma G \Lambda\} + \Omega < 0$ を満たす $G \in \mathbf{R}^{q\times r}$ が存在する．

(ii) $\Gamma^{\perp}\Omega(\Gamma^{\perp})^T < 0$，かつ，$(\Lambda^T)^{\perp}\Omega((\Lambda^T)^{\perp})^T < 0$ が成り立つ．

ここで，$(\cdot)^{\perp}$ は，$(\cdot)^{\perp}(\cdot) = 0$，かつ，$(\cdot)^{\perp}((\cdot)^{\perp})^T > 0$ を満たす行列とする．

従来，この消去補題は，(i) の形で与えられた単一目的の制御系設計問題を，これに含まれる非線形項を消去して (ii) の形で与えられる 2 つの部分凸最適化問題に帰着させて解くために使用されてきた [8),9)]．これに対し，本研究では，文献 [7] と同様の逆適用を行うことを考える．つまり，式 (7) の 2 つの不等式を命題 (ii) の 2 つの不等式と解釈し，命題 (i) の形の不等式を導出する．その際に新たに生じる補助変数 G を全ての行列不等式で共通化する方法が本論文で提案する方法である．

消去補題より，補題 1 と等価な以下の補題を得る．

補題 3　式 (5) の全ての極が領域 $\mathbf{D}$ に含まれるための必要十分条件は，以下の行列不等式を満足する $\mathcal{X} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ と $\mathcal{V} \in \mathbf{R}^{dn\times dn}$ が存在することである．

$$\mathrm{He}\left\{\begin{bmatrix} \xi \\ L^T \otimes \bar{A} \\ -I_{dn} \end{bmatrix} \mathcal{V} \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & \varepsilon I_{dn} \end{bmatrix}\right\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_d \otimes X \\ 0 & -I_d \otimes X & 0 \\ I_d \otimes X & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\xi := \tfrac{1}{2} R_{11} \otimes I_n + R_{12} \otimes \bar{A} \quad (16)$$

ただし，ε は任意の正実数である．

証明: 補題 2 の命題 (i) に以下の式を代入すると式 (15) が得られる．

$$\Omega := \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_d \otimes X \\ 0 & -I_d \otimes X & 0 \\ I_d \otimes X & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^T := \begin{bmatrix} \xi^T & (L^T \otimes \bar{A})^T & -I_{dn} \end{bmatrix}$$

$$G := \mathcal{V},\ \Lambda := \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & \varepsilon I_{dn} \end{bmatrix}$$

また，$\Gamma^{\perp}$ と $(\Lambda^T)^{\perp}$ はそれぞれ以下のようになる．

$$\Gamma^{\perp} = \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & \xi \\ 0 & I_{dn} & L^T \otimes \bar{A} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$(\Lambda^T)^{\perp} = \begin{bmatrix} \varepsilon I_{dn} & 0 & -I_{dn} \\ 0 & I_{dn} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

これらを補題 2-(ii) の前者に代入すると式 (7) の左側の式が，後者に代入すると右側の式（$\mathcal{X} > 0$）が得られる．以上より，補題 1 と補題 3 は等価であることが示される．

補題 1 の場合と同様に，補題 3 でも扱う行列不等式の数は無数であるため，このままでは数値的に取り扱うことができない．そこで，補題 3 で新たに生じた補助変数 $\mathcal{V}$ を全ての行列不等式で共通化することを考える．これにより，以下の定理を得る．

定理 2　式 (5) のシステムの全ての極が領域 $\mathbf{D}$ に含まれるための十分条件は，$\forall i \in \{1, \cdots, N\}$ に対して以下の行列不等式を満足する $X_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ と（全ての不等式で共通な）$V \in \mathbf{R}^{dn\times dn}$ が存在することである．

$$\mathrm{He}\left\{\begin{bmatrix} \xi_i' \\ L^T \otimes \bar{A}_i \\ -I_{dn} \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} I_{dn} & 0 & \varepsilon I_{dn} \end{bmatrix}\right\}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_d \otimes X_i \\ 0 & -I_d \otimes X_i & 0 \\ I_d \otimes X_i & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\xi_i' := \tfrac{1}{2} R_{11} \otimes I_n + R_{12} \otimes \bar{A}_i \quad (20)$$

ただし，ε は任意の正実数である．

証明：定理 1 の証明と同様に，式 (19) に τ_i を乗じて和を取り，$\mathcal{X} := \sum_{i=1}^{N} X_i$ と定義すると式 (15) を得る．

注意 1 消去補題より，式 (19) において X_i を全て共通化（$X_i := X$ とおく）した式が式 (9) と等価になるので，定理 2 は定理 1 を含む．つまり，定理 2 は定理 1 より少なくとも悪い結果はもたらさないことが理論的に保証される．

ここで，式 (19) からロバスト **D**-stability 性能を有する制御器 K を求める際に生じる問題点と本研究での対応策について説明する．式 (19) は式 (9) と同様に変数 K と V の積からなる非線形項が含まれるため凸最適化問題とならず，容易に数値解を得ることができない．このような場合，式 (13) の導出と同じく変数変換を施すことが標準的であるが，付録の説明の通り，クロネッカー積の存在のため変数変換を行うことができない．しかし，このことを逆に考えれば，クロネッカー積が通常の行列積になる場合は変数変換が可能となる．そこで，本研究では，R_{11}, R_{12}, R_{22} がスカラーの場合，つまり，$d = 1$ の場合を考える．この場合に $W_2 := KV$ の変数変換を施すと以下の系を得る．

系 1 式 (5) のシステムの全ての極が領域 **D** に含まれるための十分条件は，$\forall i \in \{1, \cdots, N\}$ に対して以下の行列不等式を満足する $X_i \in \mathbf{R}^{n\times n}$ と（全ての不等式で共通な）$V \in \mathbf{R}^{n\times n}, W_2 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ が存在することである．

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & * & * \\ L^T M_i & -X_i & * \\ \beta_i & \varepsilon M_i^T L & \mathrm{He}\{-\varepsilon V\} \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$M_i := A_i V + B_i W_2 \quad (22)$$

$$\alpha_i := R_{11} V + R_{12} \mathrm{He}\{M_i\} \quad (23)$$

$$\beta_i := X_i - V + \tfrac{1}{2}\varepsilon R_{11} V^T + \varepsilon R_{12} M_i^T \quad (24)$$

この行列不等式が解を持つとき，**D**-stability 性能を有する制御器 K は $K = W_2 V^{-1}$ で与えられる．

4. 数値例

$n = 1$，$N = 2$ とし，$\mathcal{A}$ の 2 端点は以下のように，また，$\mathcal{B}$ は不確かさがなく以下のように決まるとする．

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1.2 \end{bmatrix},$$

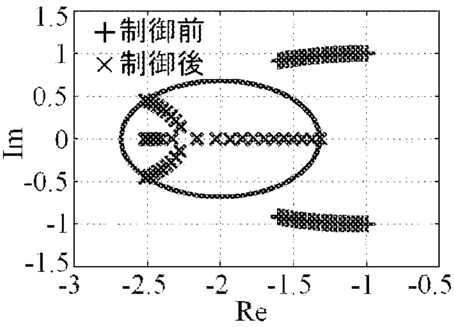

図 2 従来法の設計結果

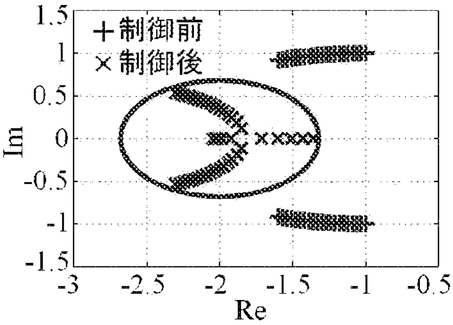

図 3 提案法の設計結果

$$\mathcal{B} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

このシステムに対して，$|z - (-2)| < 0.68$ で表される円領域を指定領域 **D** とした．なお，この円領域は式 (3) で R_{11}, R_{12}, R_{22} を以下のように設定すればよい．

$$\left[\begin{array}{c|c} R_{11} & * \\ \hline R_{12}^T & R_{22} \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c|c} 3.5376 & * \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right]$$

このような条件の下，ロバスト **D**-stability 制御系設計を行った．ただし，$L = 1$，$\varepsilon = 10$ とした．

定理 1，系 1 のそれぞれから得られた制御器を用いた閉ループ系における，不確かさに対する極の位置の変化と指定領域との位置関係をそれぞれ図 2，3 に示す．図 2 では，制御後に指定領域外に制御系の極がある[4]ので，定理 1 からはシステムがロバスト **D**-stability となる制御器が設計できていないことが確認できる．一方，図 3 では，制御後に全ての極が指定領域内に存在しているので，系 1 からはシステムがロバスト **D**-stability となる制御器が設計できていることが確認できる．以上の結果から，本論文で提案した制御系設計法は従来法が持つ保守性を改善できることが示された．

[4]図では確認しづらいが，例えば，実軸上で最も右端にある極は -1.3151 であった．これと -2 の距離は 0.6849 であるため，この極は領域 **D** 内には存在しない

5.　結論

本論文では，ポリトープ型の不確かさを持つシステムに対するロバスト **D**-stability 制御系設計問題に対し，消去補題を利用した制御系設計法を提案した．本手法の特徴は，消去補題を逆適用した際に生じる補助変数を共通化することにより，従来法を含む定式化を行ったことである．これにより，提案手法は従来法よりも少なくとも悪い結果はもたらさないことが理論的に保証される．しかし，提案手法から数値解を容易に得ることができるのは現在のところ $d=1$ の場合のみであるため，適用範囲を広げることが今後の重要な課題となる．本論文では，$d=1$ の場合に焦点を当て，従来法では所望の制御仕様を満足する制御系が設計できないが，提案手法からは設計できる数値例を示し，本手法の有効性を示した．

参考文献

1) M. Chilali, P. Gahinet: H_∞ design with pole placement constraints, An LMI approach. IEEE Trans. On Automat. Contr., 41, 358/367 (1996).
2) S. Boyd, E. L. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan: Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, Philadelphia (1994).
3) I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda: LMI-Based Controller Synthesis: A Unified Formulation and Solution,
4) 蛯原　義雄，萩原　朋道：伸張型線形行列不等式を用いた制御系の解析と設計，システム/制御/情報，Vol.48, No. 9, pp. 355-360 (2004).
5) M. C. Oliveira, J. Bernussou and J. C. Geromel : A New Discret-time Robust Stability Condition, *Syst. Contr. Lett.*, **37**, pp. 261/265, (1999).
6) D. Peaucelle, et. al, A new robust **D**-stability condition for real convex polytopic uncertainty, System & Control letters, 40-1, pp.21-30, (2000).
7) 下村　卓：パラメータ依存 Lyapunov 関数を許容する拡張空間での制御系設計，計測自動制御学会論文集，Vol. 41, No. 5, pp. 411-418, (2005).
8) T. Iwasaki and R. E. Skelton, *All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas,* Automatica, Vol. 30 No. 8, pp. 1307-1317, 1994.
9) P. Gahinet and P. Apkarian: A linear matrix inequality approach to H_∞ control, Int. J. Robust Nonlin. Contr., Vol.4, No. 4, pp. 421-448, (1994).

付録

A　式 (19) で変数変換ができない理由

式 (19) の He{·} の中を計算して得られる行列の (2,1) ブロックを用いてこのことを説明する．

上記のブロックは以下の行列の積となる．

$$\begin{bmatrix} l_{11}\bar{A}_i & \cdots & l_{1d}\bar{A}_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{d1}\bar{A}_i & \cdots & l_{dd}\bar{A}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{d1} & \cdots & V_{dd} \end{bmatrix} \tag{25}$$

ただし，$l_{ij}(i,j:=1,2,\cdots,d)$ は L の (i,j) 要素（スカラー）を，$V_{ij}(i,j:=1,2,\cdots,d)$ は V の (i,j) ブロック（行列）を表す．さらに，上式の (1,1) ブロックを計算すると以下の式を得る．

$$[\text{式 (25) の } (1,1) \text{ ブロック}] = \sum_{i=1}^{d} l_{1i}(A_iV_{i1}+B_iKV_{i1})$$

この式に含まれる非線形項は KV_{i1} なので，式 (13) の導出と同様に $M_i := KV_{i1}$ とおけば非線形項はなくなる．ただし，全ての不等式で共通な K を求めることが目的なので，$K = M_1V_{11}^{-1} = \cdots = M_dV_{d1}^{-1}$ が成立しなければならない．しかし，数値的に求めた独立変数 M_i, V_{i1} が必ずこの条件を満足するとはいえず，このことは他のブロックでも同様である．したがって，式 (13) の導出で用いた変数変換は式 (19) に対して使用できない．